

Retas normal

Uma vez que a recta normal à superfície no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é paralela ao vector n ~~esta recta~~, tem-se que esta recta pode ser expressa parametricamente como

$$x = x_0 + f_x(x_0, y_0) t$$

$$y = y_0 + f_y(x_0, y_0) t$$

$$z = z_0 - t$$

isto se o vector for

$$n = f_x(x_0, y_0) i + f_y(x_0, y_0) j - k$$

Para $n = f_x(x_0, y_0, z_0) i + f_y(x_0, y_0, z_0) j + f_z(x_0, y_0, z_0) k$ então

$$x = x_0 + f_x(x_0, y_0, z_0) t$$

$$y = y_0 + f_y(x_0, y_0, z_0) t$$

$$z = z_0 + f_z(x_0, y_0, z_0) t$$

Gradiente

A derivada direccional

$$D_u f(x, y) = f'_x(x, y) u_1 + f'_y(x, y) u_2 = \nabla f(x, y) \cdot u$$

p.e

Determine o gradiente de $f(x, y) = 3x^2y$ no ponto $(1, 2)$ use-o para calcular a derivada direccional de f em $(1, 2)$ na direcção do vector $a = 3i + 4j$

$$f'_x(x, y) = 6xy i$$

$$; f'_y(x, y) = 3x^2 j$$

Sabendo que

$$\nabla f(x, y) = f'_x(x, y) i + f'_y(x, y) j = 6xy i + 3x^2 j$$

Logo o gradiente de f em $(1, 2)$ é

$$\nabla f(1, 2) = 12i + 3j$$

Como $a = 3i + 4j$ não é unitário logo temos que normalizar

$$u = \frac{a}{\|a\|} = \frac{3i + 4j}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} i + \frac{4}{5} j$$

Como

$$D_u f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot u = 12i + 3j \cdot \left(\frac{3}{5} i + \frac{4}{5} j \right) = \frac{48}{5}$$

(4)